Centroid Decomposition

Αδάμος Ττοφαρή

Περιεχόμενα

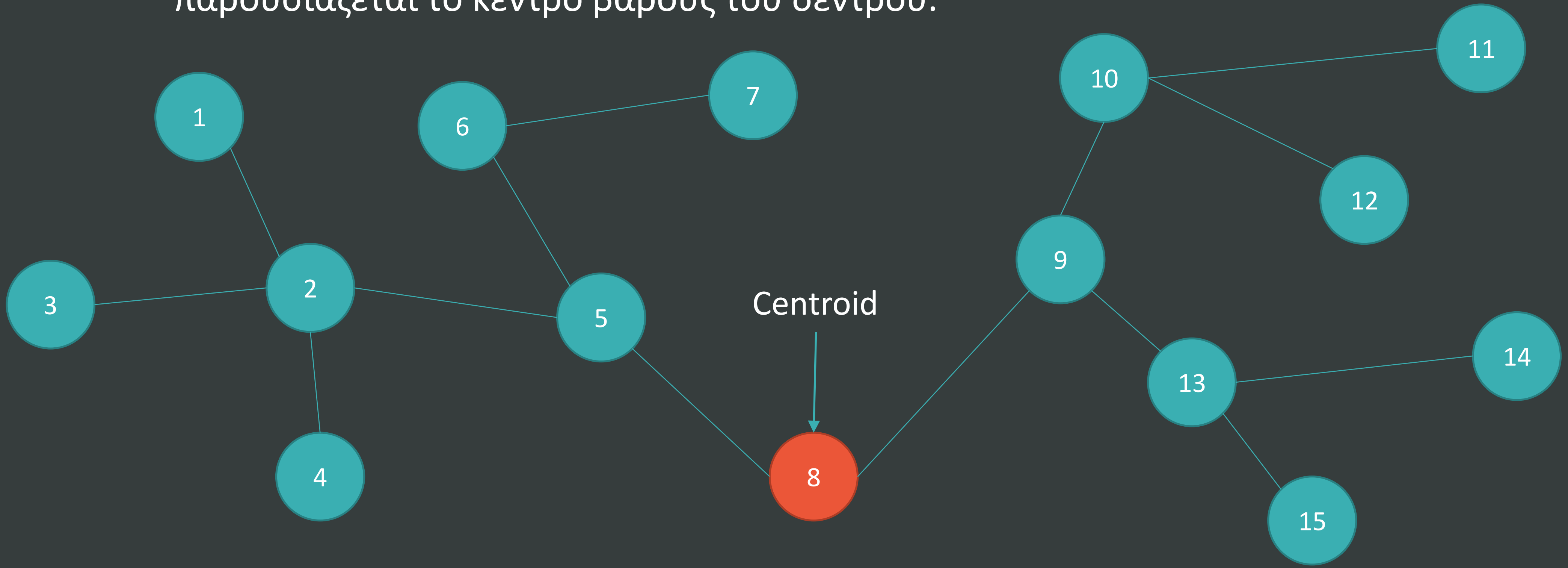
- Εισαγωγή
- Centroid of a Tree
  - How to find it?
- Centroid Tree
  - Visualization
  - Ιδιότητες

Εισαγωγή

Η αποδόμηση του κέντρου βάρους (Centroid Decomposition) είναι απλός μια τεχνικη Διαίρει και Βασίλευε (Divide and Conquer) που χρησιμοποιείται στα δέντρα και είναι χρήσιμο σε πάρα πολλά προβλήματα. Είναι αλλιώς γνωστό ως "Separator Decomposition". Θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε πως κάνουμε Centroid Decomposition και μετά θα αναφερθούμε στις εφαρμογές του.

Centroid of a Tree

Σε ένα δέντρο με N κόμβους, το κέντρο βάρους του είναι ο κόμβος που αν τον αφαιρέσουμε από το γράφο, μετατρέπει το δέντρο σε δάσος από δέντρα, όπου κάθε από αυτά τα δέντρα δεν περιέχει περισσότερο από N/2 κόμβους. Στο ποιο κάτω σχήμα παρουσιάζεται το κέντρο βάρους του δέντρου.



Πως το βρίσκουμε?

Ένας απλός τρόπος να βρούμε το κέντρο βάρους είναι να επιλέξουμε μια τυχαία ρίζα, έπειτα με την χρήση δυναμικού προγραμματισμού να υπολογίσουμε το μέγεθος κάθε υπόδεντρου, και μετά να μετακινηθούμε αρχίζοντας από την ρίζα προς το μεγαλύτερο υπόδεντρο που περιέχει περισσότερο από N/2 κόμβους μέχρι κάθε υπόδεντρο του κόμβου που βρισκόμαστε δεν περιέχει περισσότερους από N/2 κόμβους.

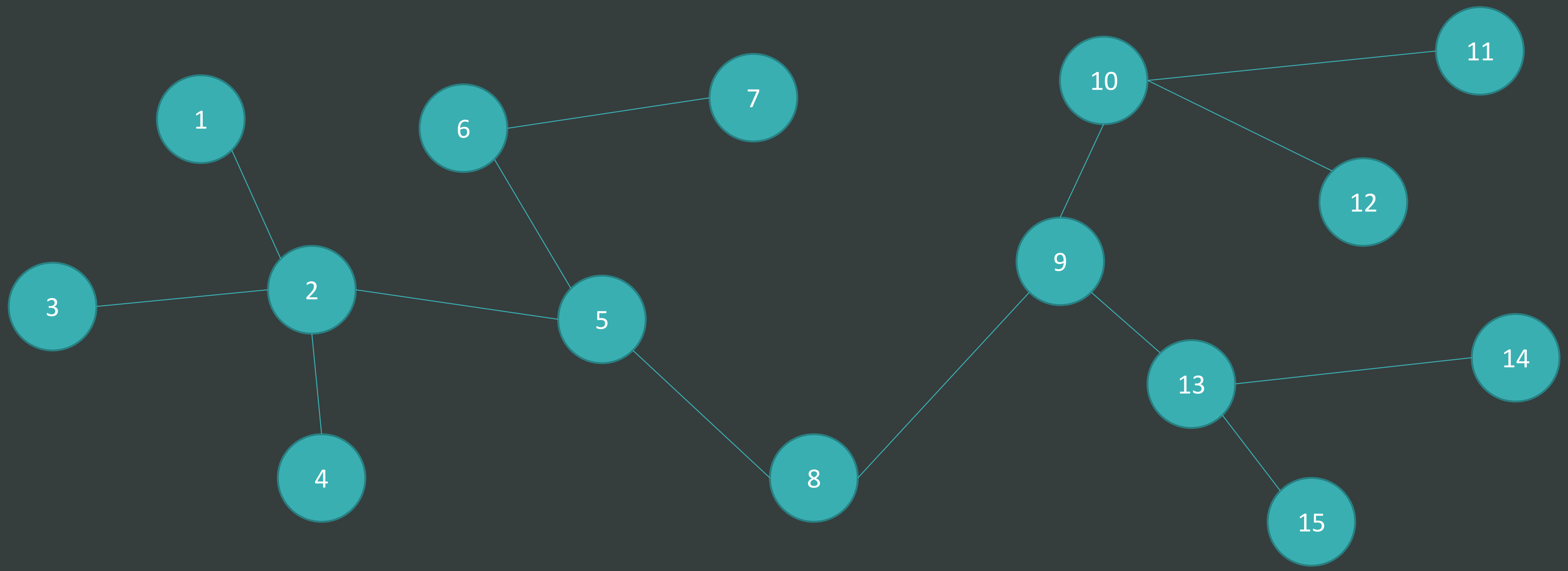
Η χρονική πολυπλοκότητα είναι O(N), λόγο του ότι χρειαζόμαστε μια διάσχιση για να υπολογίσουμε το πλήθος των κόμβων για κάθε υπόδεντρο και ακόμα μια για να βρούμε το κέντρο βάρους.

Δημιουργώντας το Centroid Tree

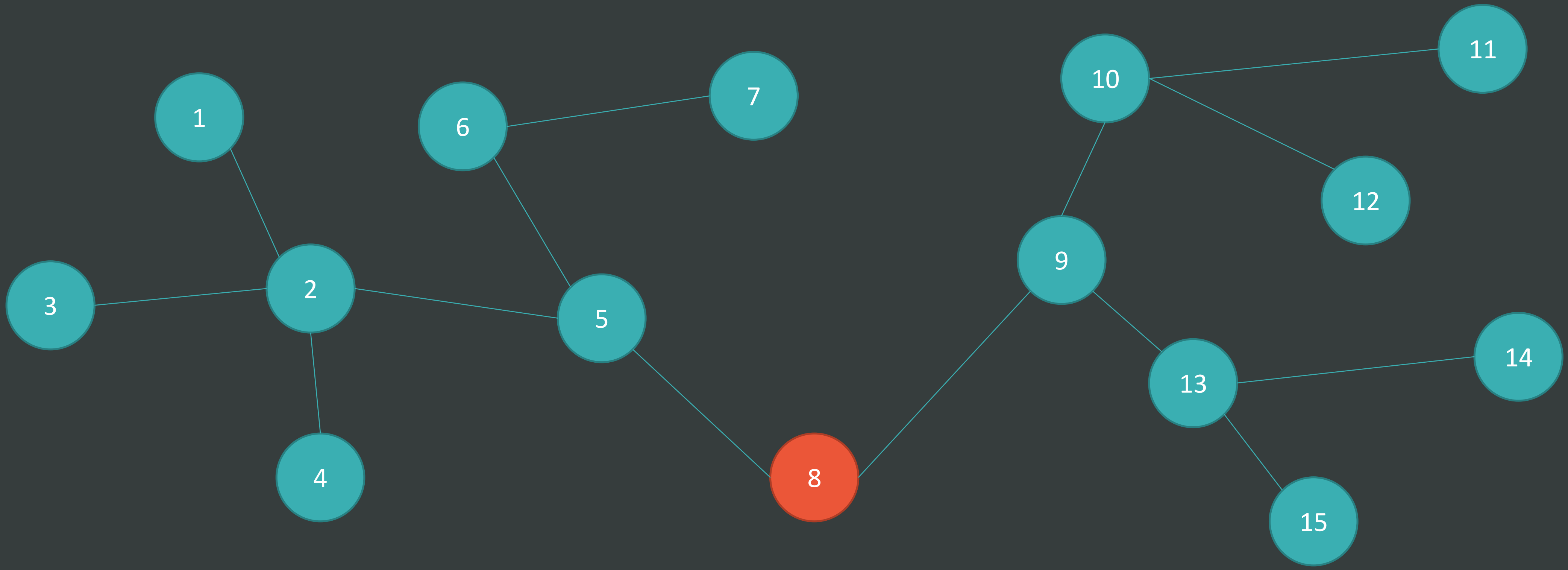
Όταν αφαιρέσουμε το centroid, το αρχικό δέντρο σπάζει σε ένα πλήθος από διαφορετικά δέντρα, κάθε από αυτά να έχει πλήθος κόμβων ≤ N/2. Αναθέτουμε το centroid ως την ρίζα του Centroid Tree μας και μετά αναδρομικά σπάζουμε κάθε ένα από τα νέα δέντρα και συνάπτουμε τα centroid τους ως παιδιά του προηγουμένου centroid. Έτσι, δημιουργούμε το Centroid Tree.

Visualization

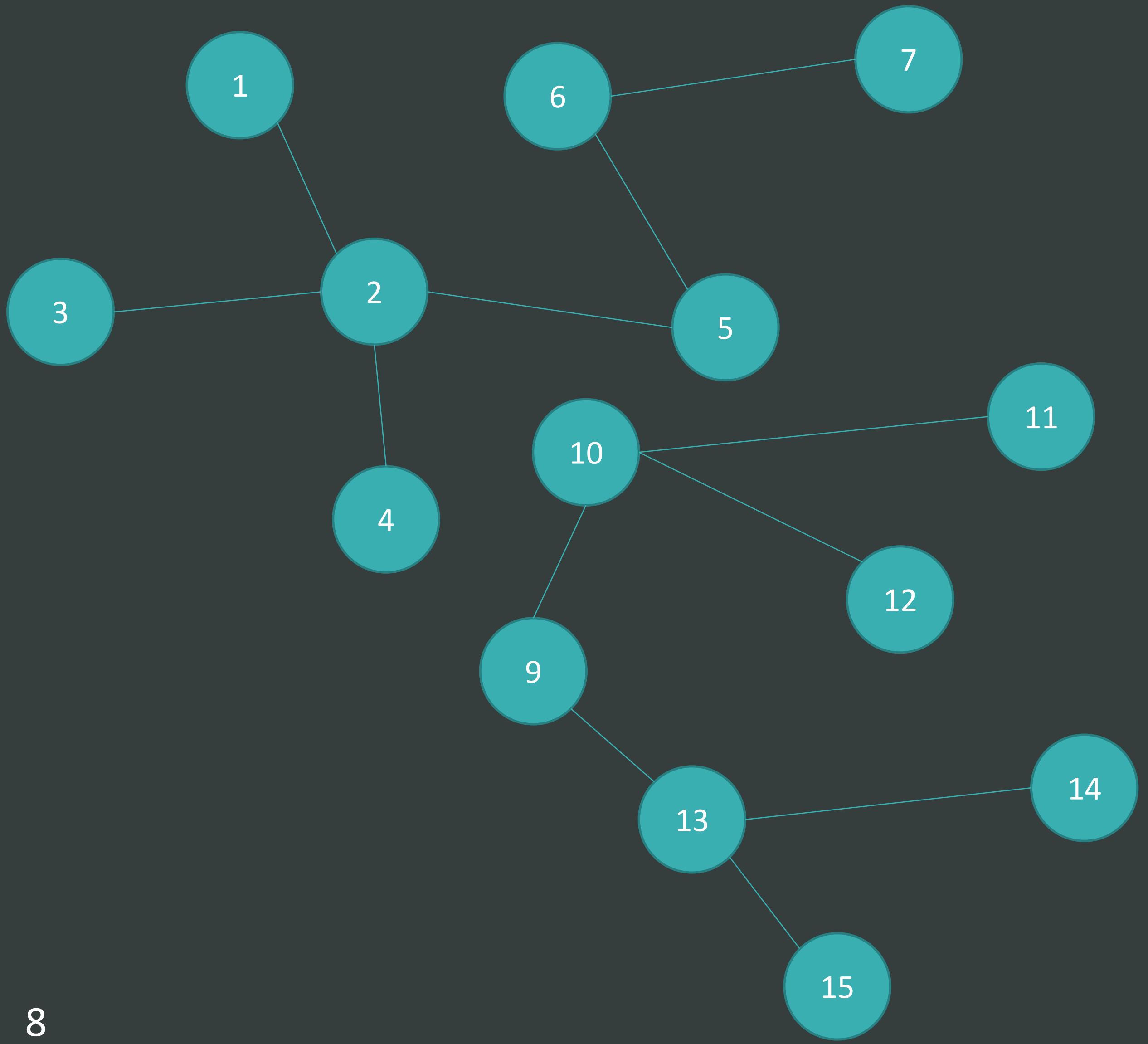
Αρχικό Δέντρο



Βρίσκουμε το Centroid

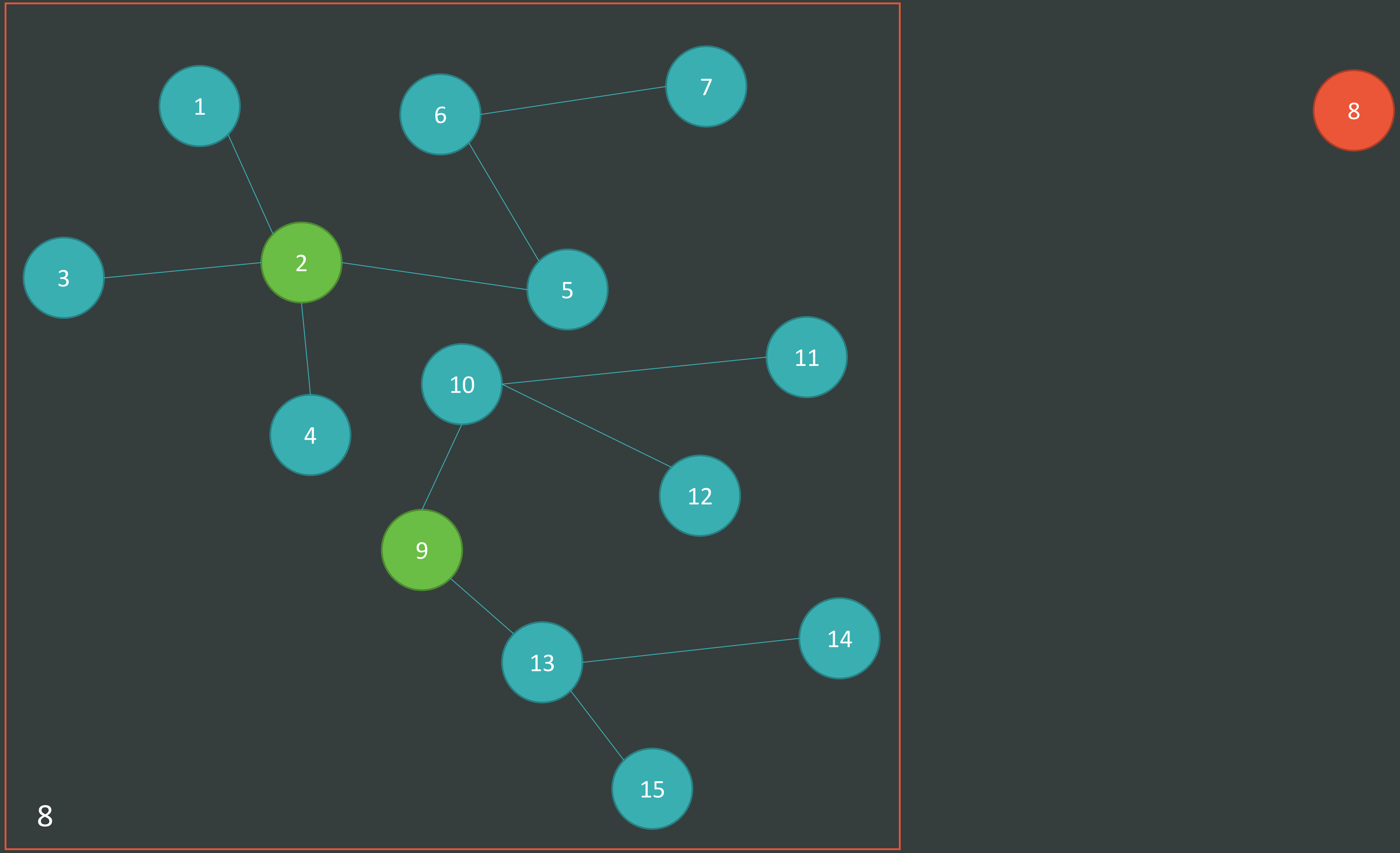


Το αφαιρούμε από το αρχικό δέντρο

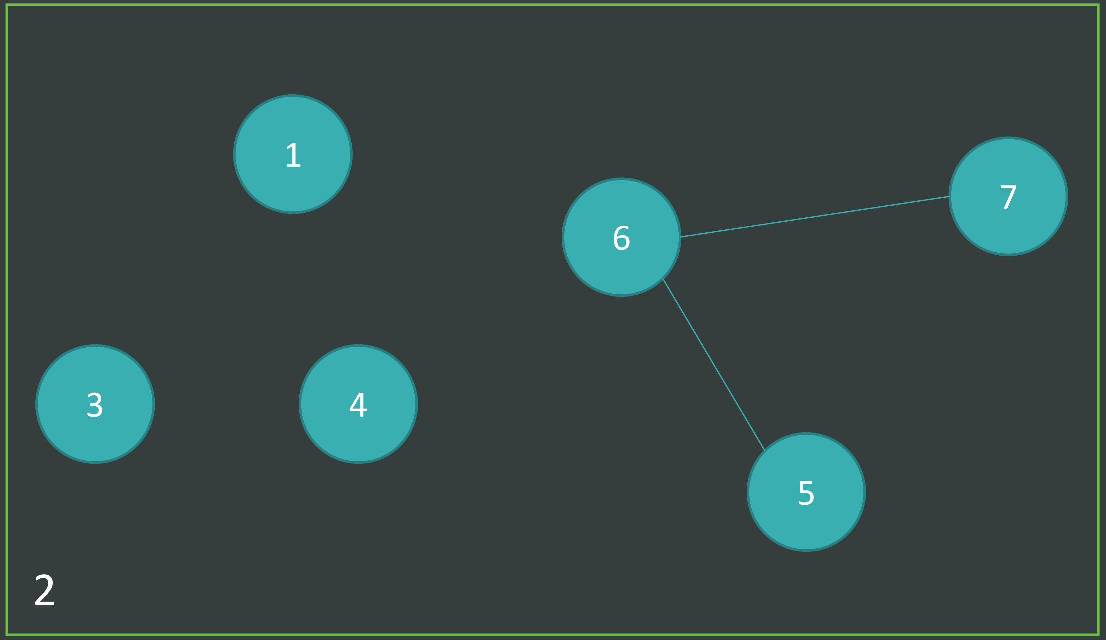


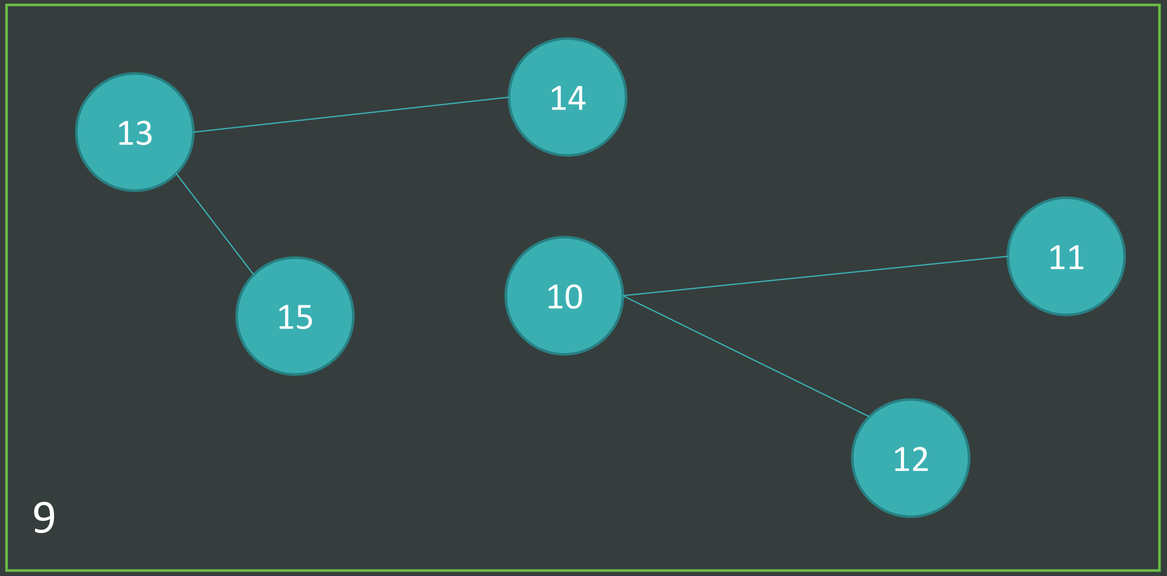
Το αναθέτουμε ως ρίζα του Centroid Tree

Βρίσκουμε το Centroid των καινούριων δέντρων

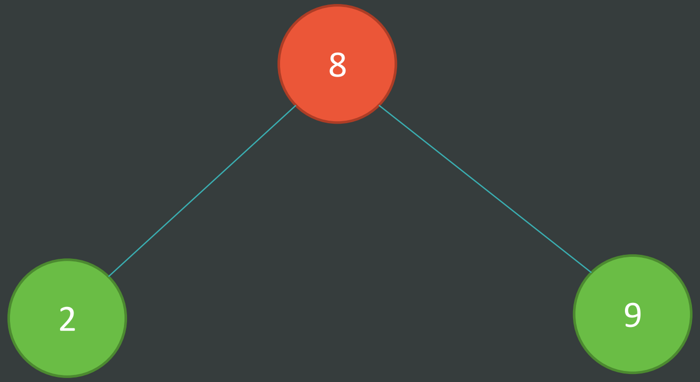


Τα αφαιρούμε από το αρχικά δέντρα

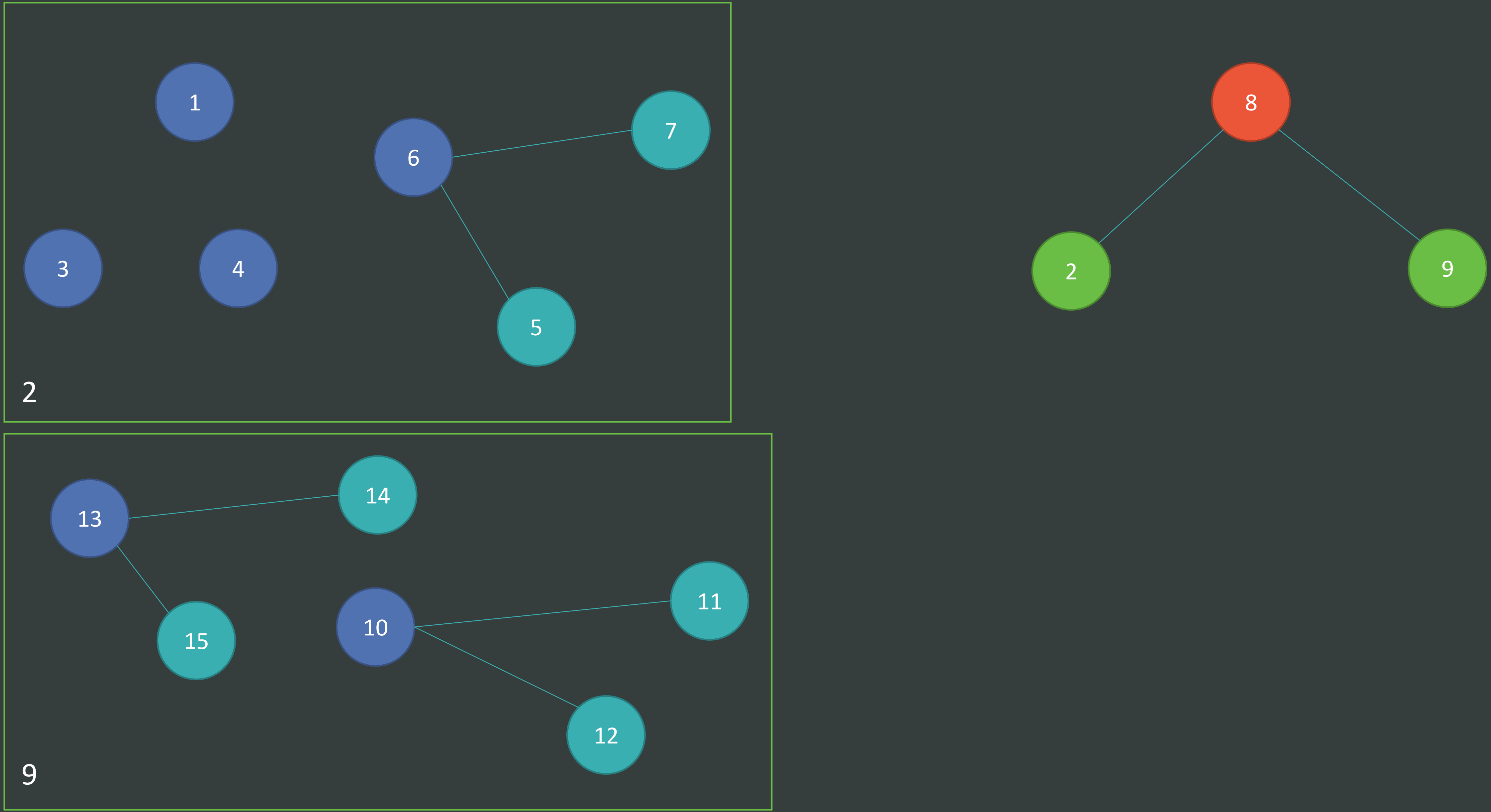




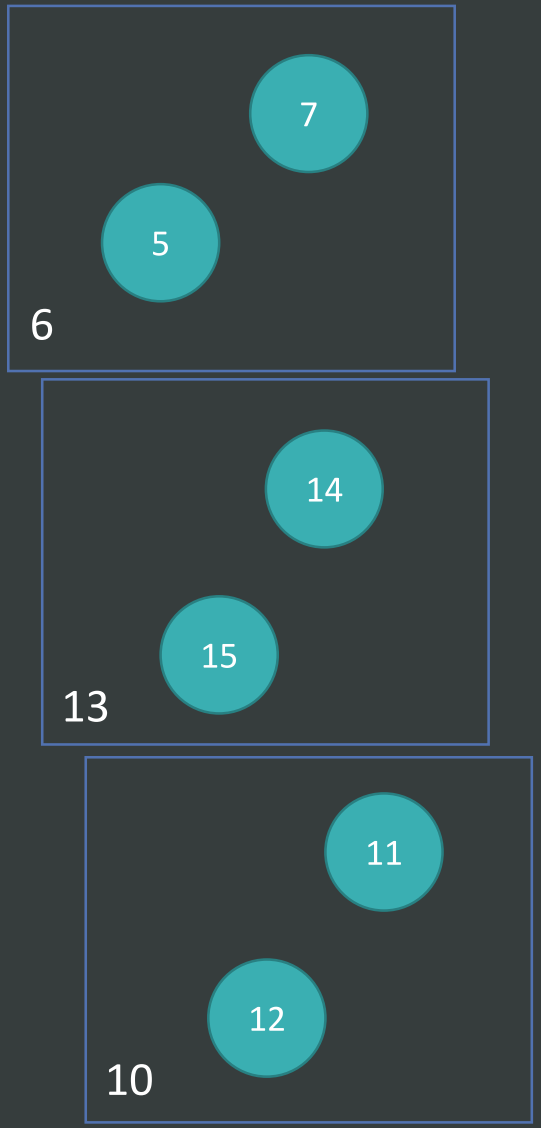
Τα προσθέτουμε ως παιδιά του προηγουμένου Centroid



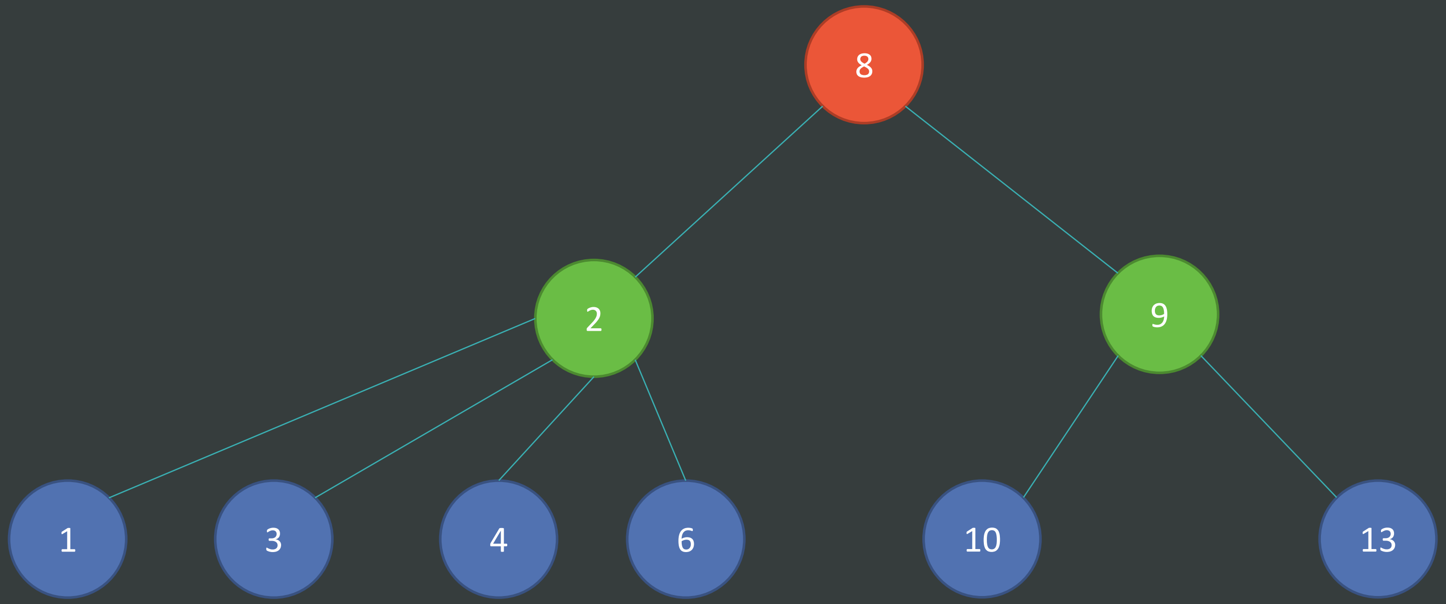
Βρίσκουμε το Centroid των καινούριων δέντρων



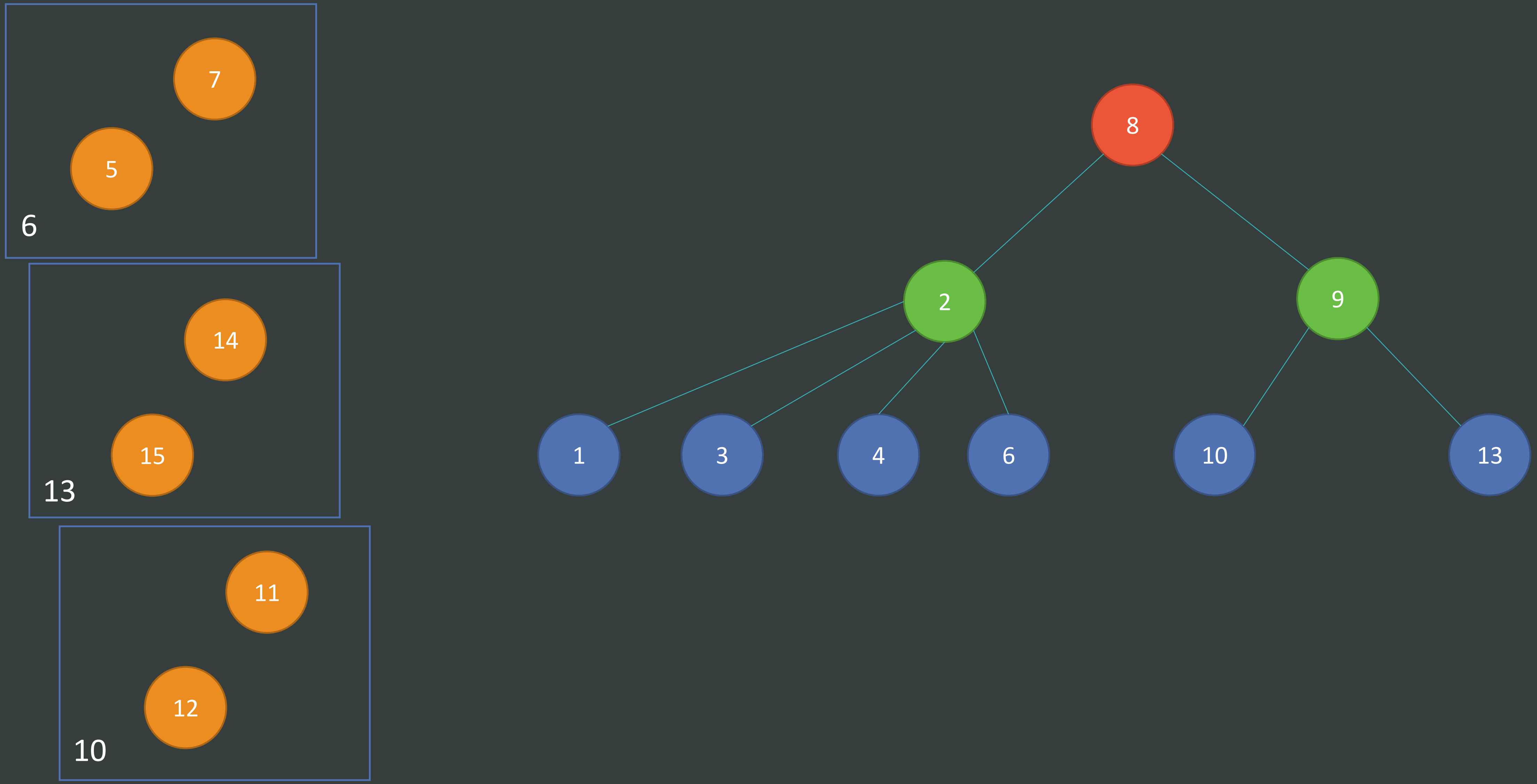
Τα αφαιρούμε από το αρχικά δέντρα

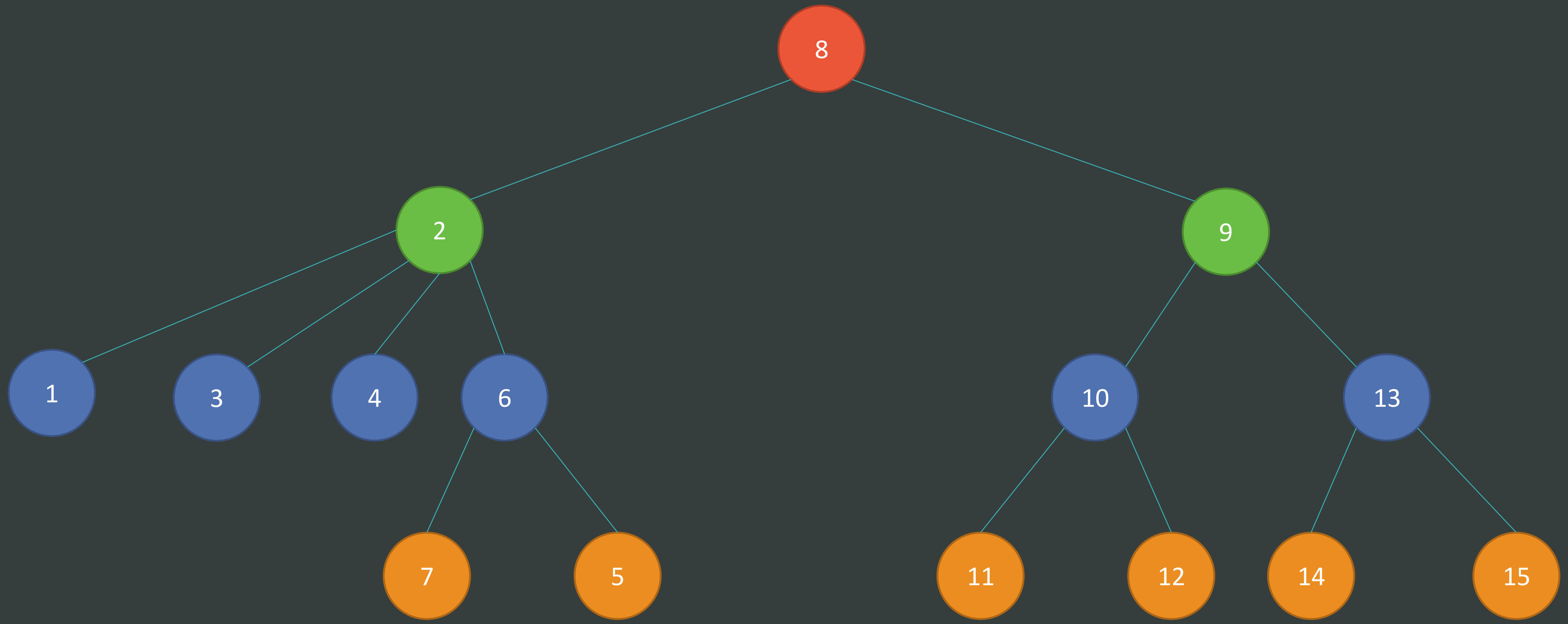


Τα προσθέτουμε ως παιδιά του προηγουμένου Centroid



Βρίσκουμε το Centroid των καινούριων δέντρων




8
2
9
1
3
4
6
10
13
7
5
11
12
14
15

Ιδιότητες ενός Centroid Tree

Το Centroid Tree περιέχει όλους τους κόμβους του αρχικού δέντρου

Αφού κάθε κόμβος θα γίνει centroid κάποιου μικρότερου δέντρου (πιθανόν να περιέχει μόνο ένα κόμβο), έτσι το Centroid Tree που θα κτίσουμε θα περιέχει όλους τους N κόμβους του αρχικού δέντρου.

Το ύψος του Centroid Tree είναι το πολύ O(logN)

Αφού σε κάθε βήμα, τα νέα δέντρα που θα δημιουργηθούν αν αφαιρέσουμε το Centroid θα έχουν μέγεθος το πολύ N/2, το μέγιστο αριθμό επίπεδων που μπορούμε να έχουμε είναι O(logN). Έτσι, το ύψος του Centroid Tree είναι το πολύ O(logN).

Για κάθε ζεύγος κόμβων A και B το μονοπάτι μεταξύ τους (στο αρχικό δέντρο) μπορεί να σπάσει σε A→C και C->B οπού C ο LCA του A και του B στο Centroid Tree

- Δεν είναι δύσκολο να φανεί ότι κάθε ζεύγος κόμβων A και B και ο LCA C στο Centroid Tree, και οι δυο A και B ήταν στην ιδιά ομάδα οπού ο C ήταν ο Centroid, και χωρίστηκαν για πρώτη φορά όταν αφαιρέθηκε ο C.

- Ο κόμβος C μπορεί να θεωρηθεί ως: Ο κόμβος με το χαμηλότερο βάθος (στο Centroid Tree) στο μονοπάτι από το A στο B.

8	Κοκκίνο	0
2,9	Πράσινο	1
1,3,4,6,10,13	Μοβ	2
7,5,11,12,14,15	Πορτοκαλί	3

Έτσι, αποσυνθέτουμε το δένδρο σε O(NlogN) διαφορετικά μονοπάτια (από κάθε Centroid σε κάθε κόμβο στο υπόδεντρο του) έτσι κάθε μονοπάτι μπορεί να συναρμολογηθεί από δυο τιμές του συνόλου.

Χρησιμοποιώντας μια δομή δεδομένων, διατηρούμε την χρήσιμη πληροφορία (βάση του προβλήματος) αυτά τα O(NlogN) που επιλέξαμε να αποθηκεύσουμε την πληροφορία τους μπορούμε να συναρμολογήσουμε όλα τα υπόλοιπα συνδυάζοντάς δυο διαφορετικά μονοπάτια από κάποιο σύνολο και αυτά τα μονοπάτια μπορούν να βρεθούν σε χρόνο O(logN), με το να βρούμε το LCA στο Centroid Tree.

“Winning is only half of it. Having fun is the other half.”

Email: adamos2468@gmail.com
and
Implementation